1. A Merkúr, Naprendszerünk legbelső bolygója ellipszispályán kering a Nap körül, távolsága a Naptól napközelben körülbelül 46 millió kilométer, míg naptávolban 69,8 millió kilométer.
a) Számítsa ki, hogy mekkora nehézségi erővel vonzza a Merkúr a felszínén lévő 1 kg tömegű testet!
b) Mekkora erővel vonzza a Nap ugyanezt a testet, amikor a Merkúr Napközelben, illetve Naptávolban van?
c) A Merkúr napközelben van. A Naphoz legközelebbi pontjában és a Naptól legtávolabb eső pontjában is van egy 1 kg tömegű test. Mekkora a két testre ható eredő gravitációs erők különbsége?

(A Merkúr tömege $M_M = 3{,}3 \cdot 10^{23}$ kg, sugara $R = 2440$ km.
A Nap tömege $M_N = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, a gravitációs állandó értéke $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.)

(2020. május)

Megoldás:

Adatok: $D_1 = 46\,000\,000$ km, $D_2 = 69\,800\,000$ km, $M_M = 3{,}3 \cdot 10^{23}$ kg, $R = 2440$ km,
$M_N = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $m = 1$ kg, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

a) *A gravitációs erőtörvény felírása és a Merkúr vonzóerejének kiszámítása:*

3 pont (bontható)

Mivel $F_{grav} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ (1 pont)

ezért $F_M = \gamma \frac{M_M \cdot m}{R^2} = 3{,}7$ N (képlet + számítás, 1 + 1 pont).

(Az első pont általános képlet hiányában is megadandó, amennyiben a vizsgázó bármelyik feladatrésznél helyesen felírja az általános tömegvonzás törvényét.)

b) *A Nap vonzóerejének kiszámítása napközelben, illetve naptávolban:*

4 pont (bontható)

$F_{N_1} = \gamma \frac{M_N \cdot m}{D_1^2} = 0{,}063$ N (képlet + számítás, 1 + 1 pont),

$F_{N_2} = \gamma \frac{M_N \cdot m}{D_2^2} = 0{,}027$ N (képlet + számítás, 1 + 1 pont).

c) *A két vonzóerő közti különbség meghatározása:*

4 pont (bontható)

A Merkúr felszínének bármely pontján lévő testre jó közelítéssel azonos nagyságú vonzóerőt fejt ki a Nap. ($D_1 >> R$)
Mivel az összes gravitációs erő a Nap felőli oldalon:
$F_{g_1} = F_M - F_{N_1}$ (1 pont),
az ellentétes oldalon pedig:
$F_{g_2} = F_M + F_{N_1}$ (1 pont),
ezért a két oldal közti különbség:
$\Delta F_g = 2 \cdot F_{N_1} = 0{,}126$ N (képlet + számítás, 1 + 1 pont).

(Amennyiben a vizsgázó a két erő különbségét vektorosan képezte, és helyesen számolt, a megoldást el kell fogadni.)

Összesen: 11 pont

2. Mekkora erővel vonzza a Föld az Egyenlítőn nyugvó, 3 kg tömegű testet, ha a Föld egyenlítői sugara 6370 km, tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg? A Föld forgása miatt az Egyenlítőn mérhető nehézségi erő ennél kisebb. Mennyivel? Hány százaléka ez az érték a gravitációs vonzóerőnek? (A tengely körüli forgás periódusát 24 órával közelítjük, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm² /kg².)

(2021. május)

Megoldás: (10 pont)

Adatok: R = 6370 km, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, m = 3 kg, T = 24 h, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²

A testre ható gravitációs erő meghatározása:

4 pont (bontható)

$$F_{grav} = f \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2} = 29{,}6 \text{ N}$$

(képlet + behelyettesítés + számítás, 1 + 1 + 2 pont)

(Ha a vizsgázó nem végzi el a gravitációs erőre vonatkozó részletes számítást, hanem közvetlenül a nehézségi/gravitációs gyorsulásból számítja a keresett erőt 1 pont adható.)

A testre ható gravitációs erő és nehézségi erő különbségének meghatározása:

4 pont (bontható)

$$(F_{cp}) = F_{grav} - F_{neh} = m \cdot R \cdot \omega^2 = m \cdot R \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rightarrow F_{grav} - F_{neh} = 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \frac{4\pi^2}{(8{,}64 \cdot 10^4)^2} = 0{,}1\text{N}$$

(képlet + behelyettesítés + számítás, 1 + 1 + 2 pont)

A két erő arányának meghatározása:

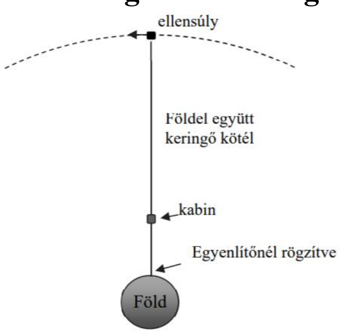
2 pont (bontható)

A két erő aránya: $\frac{0{,}1}{29{,}6} = 0{,}0034 \rightarrow 0{,}34\,\%$

(Ha a vizsgázó a nehézségi erő és a gravitációs vonzerő arányát adja meg helyesen, a teljes pontszám megadandó.)

Összesen: 10 pont

3. **A mérnököket régóta foglalkoztatja az ún. űrlift gondolata. Ennek lényege az volna, hogy egy, a Földdel együtt forgó, a Föld felszínére mindig merőleges, feszes kötél nyúlna az űrbe. A kötelet úgy alakítanák ki, hogy azon kisebb tömegű kabinok közlekedhessenek, azaz a kötélbe kapaszkodva felfelé, illetve lefelé mozoghatnának a földfelszín és az űr között. A kötél egyik vége az Egyenlítőnél lenne rögzítve, a másik végén egy nagy tömegű ellensúly lenne. Az ellensúlyt körpályára állítanák akkora sebességgel, hogy mindig az Egyenlítőn lévő rögzítési pont fölött tartózkodjon. A keringési ideje tehát megegyezne a Föld tengely körüli forgásának periódusával. Az ellensúly sebessége meghaladná a pályához tartozó körsebességet, ezért a kötél megfeszülne, az ellensúlyt a gravitációs vonzerő és a kötélerő eredője tartaná körpályán. A súly ily módon feszesen tartaná a kötelet, és azon kisebb tömegű kabinok „közlekedhetnének”, azaz a kötélbe kapaszkodva mozoghatnának fel, illetve le a földfelszín és az űr között. Tegyük fel, hogy egy 1000 tonna tömegű ellensúlyt egy 73 630 km hosszúságú kötéllel rögzítünk az Egyenlítőhöz. (A kötél tömege elhanyagolható.)**



a) Mekkora legyen ebben a magasságban az ellensúly sebessége, hogy az Egyenlítő ugyanazon pontja felett maradjon mozgása során?
b) Mekkora, a Föld közepe felé mutató eredő erőre van szükség az ellensúly körpályán tartásához?
c) Mekkora erővel húzza az ellensúly a kötél felső végét?

(A Föld tömege $M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, sugara $R_F = 6370$ km, a gravitációs állandó $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg$\cdot$s^2, a Föld tengely körüli forgásának periódusát közelítsük 1 nappal.)

(2021. május)

Megoldás: (12 pont)

Adatok: $M = 1000$ t, $M_F = 5{,}97\cdot 10^{24}$ kg, $R_F = 6370$ km, $h_M = 73630$ km, $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ m³/kg·s².

a) *A nehezék sebességének kiszámítása:*

4 pont
(bontható)

Mivel az együtt forgás miatt: $T = 1$ nap $= 86400$ s (1 pont), és $r = h_M + R_F = 80000$ km (1 pont), a keresett sebesség $\dfrac{2r\pi}{T} = \dfrac{2\cdot 8\cdot 10^7\cdot\pi}{86400}\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5820\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ (képlet + számítás 1 + 1 pont).

b) *Az adott sebességű nehezék 80 000 km sugarú körpályán tartásához szükséges erő kiszámítása:*

2 pont
(bontható)

$$F_c = m\frac{v^2}{r} = 10^6\,\text{kg}\cdot\frac{(5820\,\text{m/s})^2}{8\cdot 10^7\,\text{m}} \approx 423\,000\,\text{N}$$

(képlet + behelyettesítés, számítás, 1 + 1 pont)

c) *A kötélerő meghatározása:*

6 pont
(bontható)

A nehezékre ható gravitációs erő:

$$F_G = \gamma\frac{M\cdot M_F}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\,\frac{10^6\,\text{kg}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{\left(8\cdot 10^7\,\text{m}\right)^2} = 62200\,\text{N}$$

(képlet + behelyettesítés + számítás, 1 + 1 + 1 pont)

Az ellensúlyra ható gravitációs erő és kötélerő együttesen tartják körpályán a testet (2 pont).

(Bármilyen helyes megfogalmazás vagy képlet elfogadható, pl. $F_G + F_k = F_c$.)

Így a kötélerő: $F_k = 423000\,\text{N} - 62200\,\text{N} = 360800\,\text{N} \approx 361000\,\text{N}$ (1 pont).

Összesen: 12 pont